PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ALJABAR NONLINEAR DENGAN MENGGUNAKAN METODE PERTUBASI HOMOTOPI

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains Pada
Jurusan Matematika

Oleh:

SITI MUTMAINAH
10554001594

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2010

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ALJABAR NONLINEAR DENGAN MENGGUNAKAN METODE PERTUBASI HOMOTOPI

SITI MUTMAINAH
NIM: 10554001594

Tanggal Sidang: 04 Februari 2010
Periode Wisuda: Juli 2010

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas Akhir ini membahas tentang penyelesaian eksplisit sistem persamaan diferensial aljabar nonlinear $f(x, y, y') = 0$, dengan menggunakan metode pertubasi homotopi berdasarkan masalah nilai awal $y_1(0)=c_1$ dan $y_n(0)=c_n$. Metode pertubasi homotopi banyak digunakan untuk persamaan diferensial nonlinear. Berdasarkan perhitungan menunjukan bahwa hasil yang diperoleh lebih efektif dan akurat. Untuk menghampiri penyelesaian eksak dengan memperbanyak jumlah suku-suku $v_{1,0}(x), v_{1,1}(x), v_{1,2}(x), \cdots$, $v_{2,0}(x), v_{2,1}(x), v_{2,2}(x), \cdots$ dan $v_{n,0}(x), v_{n,1}(x), v_{n,m}(x), \cdots$.

Kata Kunci: Metode Pertubasi Homotopi, Persamaan Diferensial Aljabar Nonlinear.

ON THE SOLUTION OF THE NONLINEAR ALGEBRAIC DIFFERENTIAL EQUATION BY USING HOMOTOPY PERTURBATION METHOD

SITI MUTMAINAH
NIM: 10554001594

Date of Final Exam: February 04th 2010
Graduation Cremony Priod: July, 2010

Mathematic Departement
Faculty of Sciences and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No 155 Pekanbaru

ABSTRACT

This thesis discusses the exact solution for systems of nonlinear differential algebraic equation $f(x,y,y')=0$, by using the homotopy perturbation method based on the initial value problem $y_1(0)=c_1$ and $y_n(0)=c_n$. The homotopy perturbation method is used widely to solve for the systems of nonlinear differential equation. Based on calculation show that the results obtained hompert is more effective and accurate. For approximate the exact solution with seen the large number of terms $v_{1,0}(x), v_{1,1}(x), v_{1,2}(x), \cdots$, $v_{2,0}(x), v_{2,1}(x), v_{2,2}(x), \cdots$ and $v_{n,0}(x), v_{n,1}(x), v_{n,m}(x), \cdots$.

Keywords: *Homotopy Perturbation Method, Nonlinear Algebraic Differential Equation*

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Metode pertubasi homotopi dikenal pada tahun 1998 dan pertama kali dikemukakan oleh J. He, bahwa metode ini adalah metode yang banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan-persamaan linier dan nonlinier. Salah satu aplikasi metode ini adalah masalah nonlinier, karena metode pertubasi homotopi ini mempunyai ciri-ciri utama untuk mengecilkan atau menyelesaikan suatu masalah yang sulit ke suatu masalah yang mudah untuk diselesaikan. Hasil yang diperoleh dari metode pertubasi homotopi dalam penyelesaian persamaan diferensial nonlinier adalah efektif dan akurat.

Persamaan diferensial banyak muncul dibidang ilmu pengetahuan dan teknologi, persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi persamaan linier dan persamaan nonlinier. Persamaan nonlinier terdiri dari berbagai macam persamaan diantaranya persamaan parabolik nonlinier, hiperbolik nonlinier, diferensial aljabar nonlinier, algoritma nonlinier, eliptik nonlinier dan lain sebagainya. Setiap persamaan nonlinier tersebut memiliki penyelesaian yang berbeda-beda.

Penyelesaian persamaan diferensial orde satu linear pada umumnya dapat diselesaikan secara analitik sehingga menghasilkan penyelesaian eksak. Berbeda dengan persamaan diferensial orde satu linear, persamaan orde satu nonlinier sangat sulit untuk diselesaikan, meskipun sebagian kecil persamaan diferensial nonlinier dapat diselesaikan dengan metode variabel terpisah. Berbagai metode telah diusulkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier salah satunya adalah metode pertubasi homotopi.

Salah satu persamaan nonlinear yang sulit diselesaikan secara analisis adalah persamaan diferensial aljabar nonlinear, dengan bentuk $f(x, y, y') = 0$, persamaan aljabar ini juga disebut sistem persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial memiliki lebih dari satu persamaan.

Hal inilah yang membuat penulis tertarik untuk menggunakan metode pertubasi homotopi untuk mencari penyelesaian persamaan diferensial aljabar nonlinier dengan judul **”Penyelesaian Persamaan Diferensial Aljabar Nonlinier Dengan Menggunakan Metode Pertubasi Homotopi”.**

1.2 Perumusan Masalah

Bagaimana menentukan penyelesaian persamaan diferensial aljabar nonlinier $f(x, y, y') = 0,$ berdasarkan nilai awal nonliniernya $y_1(0) = c_1$, $y_2(0) = c_2$ dan $y_n(0) = c_n$, dengan menggunakan metode pertubasi homotopi.

1.3 Batasan Masalah

Pada skripsi ini penulis hanya membatasi pada persamaan diferensial aljabar nonlinier dengan persamaan umumnya $f(x, y, y') = 0,$ dengan variabel bebas x.

1.4 Tujuan

Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan penyelesaian persamaan diferensial aljabar nonlinier dengan persamaan umumnya $f(x, y, y') = 0,$ berdasarkan nilai awal nonliniernya $y_1(0) = c_1$, $y_2(0) = c_2$ dan $y_n(0) = c_n$, dengan menggunakan metode pertubasi homotopi.

1.5 Manfaat

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Dapat menyelesaikan persamaan diferensial aljabar nonlinier $f(x, y, y') = 0,$ dengan nilai awal nonliniernya $y_1(0) = c_1$, $y_2(0) = c_2$ dan $y_n(0) = c_n$.
2. Dapat menyelesaikan persamaan diferensial aljabar nonlinier yang dihasilkan oleh metode pertubasi homotopi cukup efektif dan akurat dan dapat memperkecil *error*.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini mencakup 5 bab yaitu:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, batasan masalah, perumusan masalah, tujuan, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Landasan Teori

Bab ini berisikan teori-teori pendukung apa saja untuk penelitian ini, seperti persamaan diferensial, klasifikasi persamaan diferensial, persamaan diferensial aljabar, homotopi, pertubasi, metode pertubasi homotopi dan metode pertubasi homotopi untuk sistem.

Bab III Metodologi

Bab ini memaparkan tentang apa yang akan di jelaskan dan dijabarkan langkah-langkah yang digunakan untuk mencapai tujuan skripsi ini.

Bab IV Pembahasan

Bab ini menyajikan atau menganalisa tentang metode pertubasi homotopi yang digunakan untuk menentukan penyelesaian persamaan diferensial aljabar nonlinear dengan persamaan umumnya $f(x, y, y') = 0,$ dengan nilai awalnya $y_1(0) = c_1$, $y_2(0) = c_2$ dan $y_n(0) = c_n$.

Bab V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dan saran.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan Differensial.

Persamaan diferensial adalah persamaan yang mengandung suatu fungsi yang tidak diketahui dan satu atau lebih turunannya, atau persamaan yang melibatkan beberapa turunan, baik turunan biasa maupun turunan parsial.

Defenisi 2.1 Suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas disebut persamaan diferensial. Selanjutnya jika turunan suatu fungsi hanya bergantung pada satu variabel terikat, maka disebut persamaan diferensial biasa dan jika bergantung lebih dari satu variabel bebas disebut persamaan diferensial parsial.

Teori persamaan diferensial cukup banyak dikembangkan dan digunakan untuk studi, secara signifikan terbagi dalam dua jenis persamaan yaitu:

a. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial di mana fungsi yang tidak diketahui (juga dikenal sebagai variabel dependen) adalah fungsi dari satu variabel independen. Bentuk yang paling sederhana dari fungsi yang tidak diketahui adalah nyata atau fungsi bernilai kompleks, bernilai vektor atau matriks, ini sesuai dengan mempertimbangkan sistem persamaan diferensial biasa untuk satu fungsi. Persamaan diferensial biasa diklasifikasikan lebih lanjut sesuai dengan turunan tertinggi terhadap variabel dependen yang muncul dalam persamaan.
b. Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial di mana fungsi yang tidak diketahui adalah fungsi dari beberapa variabel independen dan persamaan yang melibatkan turunan parsial. Salah satu contoh persamaan parsial adalah elips, hiperbola dan persamaan parabola.

Persamaan diferensial juga muncul bentuk linear dan nonlinear. Secara umum persamaan diferensial orde n linear adalah

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = \phi(x) \qquad (2.1)$$

fungsi-fungsi $a_0(x), a_1(x), \cdots, a_x(x)$ disebut koefisien dari persamaan diferensial, $\phi(x)$ disebut bentuk nonhomogen ketika koefisien-koefisien tersebut dikatakan konstanta, jika $\phi(x) = 0$ persamaan disebut homogen dan jika $\phi(x) \neq 0$ persamaan disebut nonhomogen.

Perhatikan kembali persamaan umum diferensial *orde-n*

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \qquad (2.2)$$

dengan f adalah fungsi dari variabel bebas x, dengan variabel tak bebas y dan turunan y sampai orde n, penyelesaian dari persamaan diferensial untuk $\frac{d^n y}{dx^n}$ yang ditulis dalam bentuk

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^n}, \cdots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) \qquad (2.3)$$

2.2 Klasifikasi Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial ini memiliki beberapa kelompok:

a. Berdasarkan orde

Orde persamaan diferensial adalah orde turunan tertinggi yang ada dalam persamaan diferensial tersebut.

Contoh :

i. $\frac{dy}{dx} = 4 + x$ disebut orde satu karena orde turunan tertingginya bernilai satu

ii. $\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0$ disebut orde tiga karena orde turunan tertingginya bernilai tiga.

b. Berdasarkan derajat

Jumlah derajat ditentukan dengan cara melihat fungsi diferensial yang memiliki pangkat tertinggi pada persamaan tersebut.

Contoh :

i. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$, memiliki derajat satu

ii. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + \left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 2\dfrac{dy}{dx} = \sin x$, memiliki derajat dua

c. Berdasarkan linear dan nonlinear

Persamaan diferensial dapat dilihat bentuk linear dan nonlinear secara langsung, yaitu dengan melihat koefisien pada fungsi turunan, jika koefisiennya konstanta atau suatu fungsi lain maka disebut persamaan linear, sedangkan jika koefisiennya suatu fungsi integral dari fungsi diferensial yang ada persamaan maka disebut persamaan nonlinear.

Contoh :

I. Linear

i. $\dfrac{dy}{dx} = xy + 2$

ii. $\dfrac{dy}{dx}(1-x) - 4x\dfrac{dy}{dx} = \cos x$

II. Nonlinear

i. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + x\dfrac{dy}{dx} - y^2 = 0$

ii. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$.

2.3 Persamaan Diferensial Aljabar

Persamaan diferensial-aljabar dapat ditemukan dalam berbagai ilmiah dan aplikasi teknik, termasuk analisis rangkaian, sistem tenaga dan proses simulasi kimia. Banyak model-model matematika penting yang dapat dinyatakan dalam persamaan diferensial-aljabar. Persamaan diferensial aljabar disebut juga bentuk umum dari sistem persamaan diferensial, sistem persamaan merupakan persamaan yang terdiri dari banyak persamaan.

Persamaan diferensial aljabar disebut juga persamaan yang fungsi dan turunannya tidak diketahui. Bentuk umum dari persamaan diferensial aljabar dapat ditulis:

$$f(x, y, y') = 0 \tag{2.4}$$

dengan nilai awal

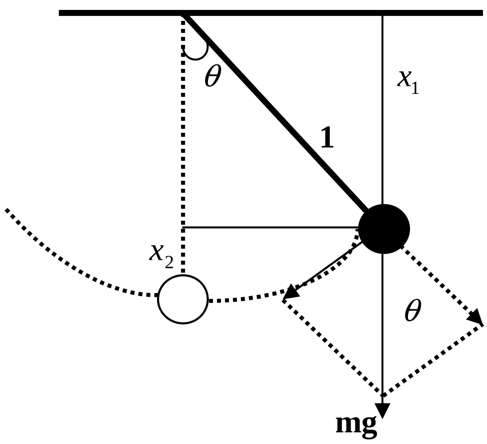
$$y_1(0) = c_1, \quad y_2(0) = c_2 \text{ dan } y_n(0) = c_n$$

dengan y adalah sebuah sebuah variabel dependent $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$. Solusi $y(x)$ penyederhanaannya selalu diasumsikan bahwa x adalah variabel tidak terikat atau variabel bebas. Solusi persamaan diferensial aljabar tergantung pada persoalannya, salah satu penyelesaian khusus dari persamaan diferensial aljabar adalah

$$y' = f(x, y, z)$$
$$0 = g(x, y, z) \tag{2.5}$$

Contoh 2.1

Sebuah contoh sederhana persamaan diferensial aljabar muncul dari model gerakan *pendulum* dalam koordinat cartesian.



Gambar 2.1 Model gerakan *pendulum*

Misalkan panjangnya 1 dan koordinat bola kecil massanya 1 di ujung batang dapat (x_1, x_2). Diberikan persamaan Newton sebagai berikut:

$$x_1'' = -\lambda x_1$$
$$x_2'' = -\lambda x_2 - g \qquad (2.6)$$

dengan g adalah gaya gravitasi dan λ adalah pengali Lagrange. λx_i adalah gaya yang menghubungkan, dengan solusi batasan $x_1^2 + x_2^2 = 1$ yang menyatakan bahwa batang mempunyai panjang 1. Selanjutnya diselesaikan dua persamaan orde dua menjadi empat persamaan diferensial orde satu, sehingga:

$$x_1' = x_3$$
$$x_2' = x_4$$
$$x_3' = -\lambda x_1$$
$$x_4' = -\lambda x_2 - g$$
$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \qquad (2.7)$$

Sistem persamaan diferensial aljabar dalam kehidupan nyata juga terdapat sistem *multibody* mekanis, sebuah sirkuit listrik dan masalah pengendalian.

Contoh 2.2

Misalkan diberikan fungsi $q(t)$, anggap masalah untuk $x(t)$.

a. $x(t) = q(t)$

adalah indek-1 persamaan diferensial aljabar, karena membutuhkan satu turunan untuk menghasilkan persamaan diferensial $x' = q'(t)$.

b. $x_1 = q(t)$

$x_2 = x_1'$

dari persamaan pertama, untuk mendapatkan $x_2 = x_1' = q'(t)$ dan kemudian untuk mendapatkan $x_2' = x_1'' = q''(t)$ ini disebut indek-2 karena membutuhkan dua turunan.

Persamaan (2.1) ditulis sebagai sistem persamaan diferensial berikut:

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$
$$y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$
$$\vdots$$
$$y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \tag{2.8}$$

dimana setiap persamaan merupakan turunan pertama dari salah satu fungsi yang tidak diketahui sebagai pemetaan yang bergantung pada variabel bebas x dan n adalah fungsi yang tidak diketahui $f_1, f_2, \cdots, f_n$.

Persamaan diferensial aljabar nonlinear adalah suatu persamaan yang mengandung variabel tak bebas atau turunannya dalam bentuk nonlinear, atau terdapat perkalian antara variabel tak bebas dan turunannya. Secara umum, persamaan diferensial nonlinear sangat sulit untuk mencari solusinya dan tidak dapat diselesaikan dengan metode terpisah maka salah satu metode yang dapat digunakan yaitu metode pertubasi homotopi.

2.4 Homotopi

Homotopi berasal dari bahasa Yunani yaitu *homos*: serupa dan *topos*: tempat dan homotopi merupakan bagian terpenting dari topologi diferensial. Diberikan I dengan $[0,1]$, jika f dan g fungsi kontinu dari X terhadap Y dan f merupakan homotopi ke g. Jika fungsi kontinu berada pada $H : X \times I \to Y$ dan H adalah homotopi dari f ke g.

Sebagai contoh, gunakan teknik homotopi untuk membangun sebuah homotopi sebagai berikut:

$$H(x, p) = (1 - p) f(x) + pg(x) = 0, \qquad p \in [0,1] \tag{2.9}$$

dengan p adalah parameter penempel pada metode homotopi, ketika $p = 0$ persamaan (2.9) menjadi $H(x,0) = f(x)$ dan $p = 1$ persamaan (2.9) menjadi $H(x,1) = g(x)$ menjadi $f(x)$. Teknik ini lah yang digunakan untuk membangun metode pertubasi, keterkaitan ini bahwa $0 \le p \le 1$, sehingga parameter penempel dianggap sebagai parameter kecil.

2.5 Pertubasi

Metode Pertubasi pertama kali diterapkan oleh J. Euler tahun (1707-1783) dan J. L. Lagrange tahun (1736-1814). Metode pertubasi memiliki terapan yang luas untuk menyelesaikan masalah nonlinier contohnya dalam mekanis, fisika dan ilmu sains lainnya.

Metode pertubasi ini juga dapat digunakan untuk menonlinearkan suatu persamaan dari persamaan linear menjadi persamaan nonlinear. Linearisasi dapat digunakan untuk menyelesaikan hampiran persamaan diferensial dengan mengekspansi kedalam bentuk deret pangkat dari paremeter kecil yang dapat diperluas terhadap suatu fungsi.

Secara garis besar analisis pertubasi memiliki beberapa tipe, yaitu

i. Parameter kecil. Merupakan salah satu langkah penting yang diambil untuk mengetahui suatu masalah, jika parameter dikatakan *p* dan kemudian *p* dapat disebut sebagai parameter pertubasi.

ii. Solusi deret tertinggi yang merupakan perluasan dari parameter kecil p, contoh deret pertubasi

$$v = v_0(x) + pv_1(x) + p^2 v_2(x) + \cdots \tag{2.10}$$

dengan v_n adalah orde sampai n.

iii. Subtitusikan persamaan (2.10) ke dalam suatu persaman dan kemudian kumpulkan atau disusun berdasarkan orde pertubasi *p* yang sama pada persamaan dan peroleh persamaan pertubasi pada masing-masing orde.

iv. Mengawali dari orde yang rendah dan selesaikan masalah pada masing-masing orde berturut-turut .

v. Mengubah hasil v_n, dengan n = 0, 1, 2, ... , ke dalam persamaan (2.10) untuk menghasilkan solusi akhir, yaitu hasil yang akurat sampai beberapa order.

Contoh 2.3

Persamaan pertubasi pada persamaan diferensial nonlinear di bawah ini:

$$\frac{dy}{dx} + py^2 = 1$$

atau

$$y' + py^2 - 1 = 0 \tag{2.11}$$

dengan nilai awal $y(0) = 0$ dan deret pertubasi

$$y = y_0 + py_1 + p^2 y_2 + p^3 y_3 + \cdots \tag{2.12}$$

Penyelesaian

Dengan substitusikan persamaan (2.12) kedalam persamaan (2.11), sehingga diperoleh:

$$(y_0' + py_1' + p^2 y_2' + p^3 y_3' + \cdots) + p(y_0 + py_1 + p^2 y_2 + p^3 y_3 + \cdots)^2 - 1 = 0$$

selanjutnya disusun berdasarkan orde pertubasi *p*, yang ditulis

$$(y_0' - 1) + p(y_1' + y_0{}^2) + p^2(y_2' + 2y_0 y_1) + p^3(2y_0 y_2 + y_1{}^2) + \cdots = 0$$

selanjutnya setelah mengumpulkan orde yang sama dari pertubasi *p*, maka

untuk orde 0 , $p = \cdots = p^n = 0$, maka

$$y_0 = x \tag{2.13}$$

untuk orde 1, $p \neq 0$, $p^2 = \cdots = p^n = 0$, maka

$$y_1' + y_0{}^2 = 0 \tag{2.14}$$

penyelesaian dari persamaan (2.14) diperoleh:

$$y_1 = -\frac{1}{3}x^3 \tag{2.15}$$

untuk orde 2, $p^2 \neq 0$, $p^3 = \cdots = p^n = 0$, maka

$$y_2' + 2y_0 y_1 = 0 \tag{2.16}$$

penyelesaian dari persamaan (2.16) diperoleh:

$$y_2 = \frac{2}{15}x^5 \tag{2.17}$$

$$\vdots$$

penyelesaian dari persamaan (2.11) diperoleh:

$$y = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$$

2.6 Metode Pertubasi Homotopi

Metode pertubasi homotopi adalah salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier dan metode homotopi pertubasi ini mempunyai tujuan utama untuk mengecilkan atau menyelesaikan suatu masalah yang sulit ke suatu masalah yang mudah untuk diselesaikan. Hasil perhitungannya cukup efektif dan akurat.

Diberikan persamaan diferensial nonliner:

$$A(y) - \phi(x) = 0 \tag{2.18}$$

dengan kondisi batas:

$$B\left(y, \frac{\partial y}{\partial n}\right) = 0$$

yang mana A adalah operator diferensial umum, B adalah operator terbatas, $\phi(x)$ adalah analisis fungsi yang diketahui.

A terdiri dari dua bagian yaitu L dan N, dimana L adalah linier dan N adalah nonlinier, sehingga $A(y) = L(y) + N(y)$. Maka dari persamaan (2.18) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$L(y) + N(y) - \phi(x) = 0 \tag{2.19}$$

jika diasumsikan L adalah operator diferensial $\frac{d}{dx}$ dengan invers operator L_x^{-1} ada, dan merupakan intergral sebanyak orde yang ada pada L terhadap x dari 0 sampai x, sehingga:

$$L_x^{-1}(\cdot) = \int_0^x (\cdot)dx$$

Menurut metode pertubasi homotopi, mengubah atau membangun sebuah homotopi untuk persamaan (2.14) dengan memenuhi hubungan berikut:

$$H(v, p) = (1 - p)\left[L(v) - L(y_0)\right] + p\left[A(v) - \phi(x)\right] = 0, \tag{2.20}$$

atau

$$H(v,p) = L(v) - L(y_0) + pL(y_0) + p\left[N(v) - \phi(x)\right] = 0 \tag{2.21}$$

dengan $p \in [0,1]$ merupakan parameter penempel yang dapat digunakan sebagai ”parameter kecil” dan y_0 adalah nilai awal yang diberikan. Persamaan (2.21) jika parameter homotopi $p = 0$ dan jika $p = 1$, maka dapat ditulis:

$$H(v,0) = L(v) - L(y_0) = 0 \tag{2.22}$$

$$H(v,1) = L(v) + N(v) - \phi(x) = 0 \tag{2.23}$$

persamaan (2.22) dan persamaan (2.23) disebut homotopi.

Metode pertubasi homotopi dari persamaan (2.21) diselesaikan dengan deret pertubasi p ditulis sebagai berikut:

$$v = v_0(x) + pv_1(x) + p^2 v_2(x) + \cdots \tag{2.24}$$

solusi dari persamaan (2.16) adalah:

$$y = \lim_{p \to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \tag{2.25}$$

2.7 Metode Homotopi Pertubasi Untuk Sistem

Persamaan (2.19) dapat ditulis dalam bentuk sistem persamaan berikut:

$$L(y_1) + N_1(y_1, y_2, \cdots, y_n) - \phi_1(x) = 0$$

$$L(y_2) + N_2(y_1, y_2, \cdots, y_n) - \phi_2(x) = 0$$

$$\vdots$$

$$L(y_n) + N_n(y_1, y_2, \cdots, y_n) - \phi_n(x) = 0 \tag{2.26}$$

Menurut metode pertubasi homotopi, mengubah atau membangun sebuah homotopi untuk persamaan (2.26) dengan memenuhi hubungan berikut:

$$H(v_1, p) = L(v_1) - L(y_1) + pL(y_1) + p\left[N_1(v_1, v_2, \cdots v_n) - \phi_1(x)\right] = 0$$

$$H(v_2, p) = L(v_2) - L(y_2) + pL(y_2) + p\left[N_2(v_1, v_2, \cdots v_n) - \phi_2(x)\right] = 0$$

$$\vdots$$

$$H(v_n, p) = L(v_n) - L(y_n) + pL(y_n) + p\left[N_n(v_1, v_2, \cdots v_n) - \phi_n(x)\right] = 0 \tag{2.27}$$

dengan $p \in [0,1]$ merupakan parameter penempel yang dapat digunakan sebagai ”parameter kecil”, sedangkan $v_1, v_2, \cdots, v_n$ adalah nilai awal yang diberikan.

Solusi dari persamaan (2.27) diselesaikan dengan deret pertubasi p dan dengan nilai awal berikut:

$$y_{1,0}(x) = y_1(0) = c_1$$

$$y_{2,0}(x) = y_2(0) = c_2$$

$$\vdots$$

$$y_{n,0}(x) = y_n(0) = c_n \tag{2.28}$$

dan deret pertubasi p

$$v_1 = v_{1,0}(x) + pv_{1,1}(x) + p^2 v_{1,2}(x) + \cdots$$

$$v_2 = v_{2,0}(x) + pv_{2,1}(x) + p^2 v_{2,2}(x) + \cdots$$

$$\vdots$$

$$v_n = v_{n,0}(x) + pv_{n,1}(x) + p^2 v_{n,2}(x) + \cdots \tag{2.29}$$

Substitusikan persamaan (2.28) – (2.29) ke persamaan (2.27), sehingga dapat ditulis:

$$\begin{aligned} H(v_1, p) = {} & L(v_{1,0} + pv_{1,1}(x) + p^2 v_{1,2}(x) + \cdots) - L(y_{1,0}) + pL(y_{1,0}) \\ & + p\big[N_1\big((v_{1,0}(x) + pv_{1,1}(x) + p^2 v_{1,2}(x) + \cdots), \\ & (v_{2,0}(x) + pv_{2,1}(x) + p^2 v_{2,2}(x) + \cdots), \cdots, \\ & (v_{n,0}(x) + pv_{n,1}(x) + p^2 v_{n,2}(x) + \cdots)\big) - \phi_1(x)\big] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(v_2, p) = {} & L(v_{2,0} + pv_{2,1}(x) + p^2 v_{2,2}(x) + \cdots) - L(y_{2,0}) + pL(y_{2,0}) \\ & + p\big[N_2\big((v_{1,0}(x) + pv_{1,1}(x) + p^2 v_{1,2}(x) + \cdots), \\ & (v_{2,0}(x) + pv_{2,1}(x) + p^2 v_{2,2}(x) + \cdots), \cdots, \\ & (v_{n,0}(x) + pv_{n,1}(x) + p^2 v_{n,2}(x) + \cdots)\big) - \phi_2(x)\big] = 0 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} H(v_n, p) = {} & L(v_{n,0} + pv_{n,1}(x) + p^2 v_{n,2}(x) + \cdots) - L(y_{n,0}) + pL(y_{n,0}) \\ & + p\big[N_n\big((v_{1,0}(x) + pv_{1,1}(x) + p^2 v_{1,2}(x) + \cdots), \\ & (v_{2,0}(x) + pv_{2,1}(x) + p^2 v_{2,2}(x) + \cdots), \cdots, \\ & (v_{n,0}(x) + pv_{n,1}(x) + p^2 v_{n,2}(x) + \cdots)\big) - \phi_n(x)\big] = 0 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Sistem persamaan (2.30) disusun berdasarkan orde pertubasi p, yang ditulis:

$$
\begin{aligned}
&\left(L(v_{1,0})-L(y_{1,0})\right)+p^1\left(L(v_{1,1})+L(y_{1,0})+N_1\left(v_{1,0},v_{2,0},\cdots,v_{n,0}\right)-\phi_1\right)\\
&+p^2\left(L(v_{1,2})+N_1\left(v_{1,1},v_{2,1},\cdots,v_{n,1}\right)\right)+\cdots+\\
&p^n\left(L(v_{1,m})+N_1\left(v_{1,m,},v_{2,m},\cdots,v_{n,m}\right)\right)=0\\
&\left(L(v_{2,0})-L(y_{2,0})\right)+p^1\left(L(v_{2,1})+L(y_{2,0})+N_2\left(v_{1,0},v_{2,0},\cdots,v_{n,0}\right)-\phi_2\right)\\
&+p^2\left(L(v_{2,2})+N_2\left(v_{1,1},v_{2,1},\cdots,v_{n,1}\right)\right)+\cdots+\\
&p^n\left(L(v_{2,m})+N_1\left(v_{1,m,},v_{2,m},\cdots,v_{n,m}\right)\right)=0\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&\left(L(v_{n,0})-L(y_{n,0})\right)+p^1\left(L(v_{n,1})+L(y_{n,0})+N_n\left(v_{1,0},v_{2,0},\cdots,v_{n,0}\right)-\phi_2\right)\\
&+p^2\left(L(v_{n,2})+N_n\left(v_{1,1},v_{2,1},\cdots,v_{n,1}\right)\right)+\cdots+\\
&p^n\left(L(v_{n,m})+N_n\left(v_{1,m,},v_{2,m},\cdots,v_{n,m}\right)\right)=0
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

Selanjutnya setelah menyusun orde pertubasi p yang sama dari setiap persamaan, kemudian menentukan suku-suku $v_{1,0}(x),v_{1,1}(x),\cdots,v_{1,n}(x)$, $v_{2,0}(x),v_{2,1}(x),\cdots,v_{2,m}(x)$ dan $v_{n,0}(x),v_{n,1}(x),\cdots,v_{n,m}(x)$ ditulis:

Orde 0, $p^1=p^2=\cdots=p^n=0$

$$
\begin{aligned}
p^0 \rightarrow\quad & L(v_{1,0})-L(y_{1,0})=0\\
& L(v_{2,0})-L(y_{2,0})=0\\
& \qquad\vdots\\
& L(v_{n,0})-L(y_{n,0})=0
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

Orde 1, $p\neq 0$ dan $p^2=p^3=\cdots=p^n=0$

$$
\begin{aligned}
p^1 \rightarrow\quad & L(v_{1,1})+L(y_{1,0})+N_1(v_{1,0},v_{2,0},\cdots,v_{n,0})-\phi_1=0\\
& L(v_{2,1})+L(y_{2,0})+N_2(v_{1,0},v_{2,0},\cdots,v_{n,0})-\phi_2=0\\
& \qquad\qquad\vdots\\
& L(v_{n,1})+L(y_{n,0})+N_n(v_{1,0},v_{2,0},\cdots,v_{n,0})-\phi_n=0
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Orde 2, $p^2\neq 0$ dan $p^3=p^4=\cdots=p^n=0$

$$p^2 \rightarrow \quad L(v_{1,2}) + N_1(v_{1,1}, v_{2,1}, \cdots, v_{n,1}) = 0$$

$$L(v_{2,2}) + N_2(v_{1,1}, v_{2,1}, \cdots, v_{n,1}) = 0$$

$$\vdots$$

$$L(v_{n,2}) + N_n(v_{1,1}, v_{2,1}, \cdots, v_{n,1}) = 0 \tag{2.34}$$

$$\vdots$$

Orde n, $p^n \neq 0$ dan $p = p^2 = \cdots = p^{n+1} = 0$

$$p^n \rightarrow \quad L(v_{1,m}) + N_1(v_{1,m}, v_{2,m}, \cdots, v_{n,m}) = 0$$

$$L(v_{2,m}) + N_2(v_{1,m}, v_{2,m}, \cdots, v_{n,m}) = 0$$

$$\vdots$$

$$L(v_{n,m}) + N_n(v_{1,m}, v_{2,m}, \cdots, v_{n,m}) = 0 \tag{2.35}$$

dengan diterapkan *invers* operator ke dalam persamaan (2.32) – (2.35) sehingga

Orde 0, $p^1 = p^2 = \cdots = p^n = 0$

$$p^0 \rightarrow \quad v_{1,0} = y_1(0)$$

$$v_{2,0} = y_2(0)$$

$$\vdots$$

$$v_{n,0} = y_n(0) \tag{2.36}$$

Orde 1, $p \neq 0$ dan $p^2 = p^3 = \cdots = p^n = 0$

$$p^1 \rightarrow \quad v_{1,1} = -L_x^{-1} y_{1,0} - L_x^{-1} N_1(x, v_{1,0}, v_{2,0}, \cdots, v_{n,0}) + \phi_1$$

$$v_{2,1} = -L_x^{-1} y_{2,0} - L_x^{-1} N_2(x, v_{1,0}, v_{2,0}, \cdots, v_{n,0}) + \phi_2$$

$$\vdots$$

$$v_{n,1} = -L_x^{-1} y_{n,0} - L_x^{-1} N_n(x, v_{1,0}, v_{2,0}, \cdots v_{n,0}) + \phi_n \tag{2.37}$$

Orde 2, $p^2 \neq 0$ dan $p^3 = p^4 = \cdots = p^n = 0$

$$p^2 \rightarrow \quad v_{1,2} = -L_x^{-1} N_1(x, v_{1,1}, v_{2,1}, \cdots, v_{n,1})$$

$$v_{2,2} = -L_x^{-1} N_2(x, v_{1,1}, v_{2,1}, \cdots, v_{n,1})$$

$$\vdots$$

$$v_{n,2} = -L_x^{-1} N_n(x, v_{1,1}, v_{2,1}, \cdots, v_{n,1}) \tag{2.38}$$

$$\vdots$$

Orde n, $p^n \neq 0$ dan $p = p^2 = \cdots = p^{n+1} = 0$

$$p^n \rightarrow \quad v_{1,m} = -L_x^{-1} N_1(x, v_{1,m}, v_{2,m}, \cdots, v_{n,m})$$

$$v_{2,m} = -L_x^{-1} N_2(x, v_{1,m}, v_{2,m}, \cdots, v_{n,m})$$

$$\vdots$$

$$v_{n,m} = -L_x^{-1} N_n(x, v_{1,m}, v_{2,m}, \cdots, v_{n,m}) \tag{2.39}$$

Selanjutnya setelah nilai suku-suku $v_{1,0}(x), v_{1,1}(x), \cdots, v_{1,m}(x)$, $v_{2,0}(x), v_{2,1}(x), \cdots, v_{2,m}(x)$ dan $v_{n,0}(x), v_{n,1}(x), \cdots, v_{n,m}(x)$ diketahui, maka penyelesaian dapat diperoleh dengan menggunakan hampiran sebagai berikut:

$$y_1(x) = \lim_{p \to 1} v_1(x) = \sum_{m=0}^{n-1} v_{1,m}(x)$$

$$y_2(x) = \lim_{p \to 1} v_2(x) = \sum_{m=0}^{n-1} v_{2,m}(x)$$

$$\vdots$$

$$y_n(x) = \lim_{p \to 1} v_n(x) = \sum_{m=0}^{n-1} v_{n,m}(x)$$

BAB III
METODOLOGI

Metode yang digunakan penulis pada skripsi ini adalah metode studi literature dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan persamaan diferensial aljabar nonlinier dengan persamaan umumnya $f(x, y, y') = 0$.
2. Mengubah persamaan $f(x, y, y') = 0$ kedalam bentuk persamaan homotopi.
3. Mensubtitusikan deret pertubasi kedalam persamaan homotopi dan menentukan orde pertubasi.
4. Setelah menentukan orde pertubasi *p*, kemudian mengubah kedalam bentuk invers operator dan mencari suku-suku:

   $$v_{1,0}(x), v_{1,1}(x), \cdots, v_{1,m}(x)$$

   $$v_{2,0}(x), v_{2,1}(x), \cdots, v_{2,m}(x)$$

   $$\vdots$$

   $$v_{n,0}(x), v_{n,1}(x), \cdots, v_{n,m}(x)$$

5. Menjumlahkan suku-suku dari solusi persamaan diferensial aljabar yaitu:

   $$y_1(x) = v_{1,0}(x) + v_{1,1}(x) + \cdots + v_{1,m}(x)$$

   $$y_2(x) = v_{2,0}(x) + v_{2,1}(x) + \cdots + v_{2,m}(x)$$

   $$\vdots$$

   $$y_n(x) = v_{n,0}(x) + v_{n,1}(x) + \cdots + v_{n,m}(x)$$

6. Menggunakan program **Maple 7** untuk membuat suku-suku dan grafik.

BAB IV
PEMBAHASAN

4.1 Penyelesaian dengan Metode Pertubasi Homotopi

Diberikan persamaan diferensial aljabar nonlinear berikut:

$$f(x, y, y') = 0 \tag{4.1}$$

atau

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \tag{4.2}$$

dengan nilai awal

$$y_1(0) = c_1,\ y_2(0) = c_2 \text{ dan } y_n(0) = c_n. \tag{4.3}$$

Persaman (4.2) dapat ditulis sebagai sistem persamaan diferensial berikut:

$$\begin{aligned}
y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\
y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\
&\vdots \\
y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Sistem persamaan (4.4) dapat diubah dalam bentuk homotopi berikut:

$$\begin{aligned}
H(v_1, p) &= v_1' - y_1'(0) + p\left(-f_1(x, v_1, v_2, \cdots, v_n)\right) = 0 \\
H(v_2, p) &= v_2' - y_2'(0) + p\left(-f_2(x, v_1, v_2, \cdots, v_n)\right) = 0 \\
&\vdots \\
H(v_n, p) &= v_n' - y_n'(0) + p\left(-f_n(x, v_1, v_2, \cdots, v_n)\right) = 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Sehingga persamaan (2.23) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
v_1 &= v_{1,0}(x) + p v_{1,1}(x) + p^2 v_{1,2}(x) + \cdots \\
v_2 &= v_{2,0}(x) + p v_{2,1}(x) + p^2 v_{2,2}(x) + \cdots \\
&\vdots \\
v_n &= v_{n,0}(x) + p v_{n,1}(x) + p^2 v_{n,2}(x) + \cdots
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Substitusikan persamaan (4.6) ke persamaan (45), sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
H(v_1,p) = {} & (v_{1,0}^{'} + pv_{1,1}^{'}(x) + p^2 v_{1,2}^{'}(x) + \cdots) - (y_1^{'}(0)) \\
& + p\big[- f_1\big(x,(v_{1,0}(x) + pv_{1,1}(x) + p^2 v_{1,2}(x) + \cdots), \\
& (v_{2,0}(x) + pv_{2,1}(x) + p^2 v_{2,2}(x) + \cdots), \cdots, \\
& (v_{n,0}(x) + pv_{n,1}(x) + p^2 v_{n,2}(x) + \cdots)\big)\big] = 0 \\
H(v_2,p) = {} & (v_{2,0}^{'} + pv_{2,1}^{'}(x) + p^2 v_{2,2}^{'}(x) + \cdots) - (y_2^{'}(0)) \\
& + p\big[- f_2\big(x,(v_{1,0}(x) + pv_{1,1}(x) + p^2 v_{1,2}(x) + \cdots), \\
& (v_{2,0}(x) + pv_{2,1}(x) + p^2 v_{2,2}(x) + \cdots), \cdots, \\
& (v_{n,0}(x) + pv_{n,1}(x) + p^2 v_{n,2}(x) + \cdots)\big)\big] = 0 \\
& \vdots \\
H(v_n,p) = {} & (v_{n,0}^{'} + pv_{n,1}^{'}(x) + p^2 v_{n,2}^{'}(x) + \cdots) - (y_n^{'}(0)) \\
& + p\big[- f_n\big(x,(v_{1,0}(x) + pv_{1,1}(x) + p^2 v_{1,2}(x) + \cdots), \\
& (v_{2,0}(x) + pv_{2,1}(x) + p^2 v_{2,2}(x) + \cdots), \cdots, \\
& (v_{n,0}(x) + pv_{n,1}(x) + p^2 v_{n,2}(x) + \cdots)\big)\big] = 0 \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya sistem persamaan dari (4.7) disusun berdasarkan orde pertubasi p, yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
& \left(v_{1,0}^{'} - y_1^{'}(0)\right) + p^1\left(v_{1,1}^{'} - f_1\left(x, v_{1,0}, v_{2,0}, \cdots, v_{n,0}\right)\right) + \\
& p^2\left(v_{1,2}^{'} - f_1\left(x, v_{1,1}, v_{2,1}, \cdots, v_{n,1}\right)\right) + \cdots + \\
& p^n\left(v_{1,m}^{'} - f_1\left(x, v_{1,m,}, v_{2,m}, \cdots, v_{n,m}\right)\right) = 0 \\
& \left(v_{2,0}^{'} - y_2^{'}(0)\right) + p^1\left(v_{2,1}^{'} - f_2\left(x, v_{1,0}, v_{2,0}, \cdots, v_{n,0}\right)\right) + \\
& p^2\left(v_{2,2}^{'} - f_2\left(x, v_{1,1}, v_{2,1}, \cdots, v_{n,1}\right)\right) + \cdots + \\
& p^n\left(v_{2,m}^{'} - f_2\left(x, v_{1,m,}, v_{2,m}, \cdots, v_{n,m}\right)\right) = 0 \\
& \qquad \vdots \\
& \left(v_{n,0}^{'} - y_n^{'}(0)\right) + p^1\left(v_{n,1}^{'} - f_n\left(x, v_{1,0}, v_{2,0}, \cdots, v_{n,0}\right)\right) + \\
& p^2\left(v_{n,2}^{'} - f_n\left(x, v_{1,1}, v_{2,1}, \cdots, v_{n,1}\right)\right) + \cdots + \\
& p^n\left(v_{n,m}^{'} - f_n\left(x, v_{1,m,}, v_{2,m}, \cdots, v_{n,m}\right)\right) = 0 \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya setelah mengumpulkan orde yang sama dari pertubasi *p*, kemudian menentukan suku-suku $v_{1,0}(x), v_{1,1}(x), \cdots, v_{1,m}(x)$, $v_{2,0}(x), v_{2,1}(x), \cdots, v_{2,m}$ dan $v_{n,0}(x), v_{n,1}(x), \cdots, v_{n,m}(x)$ dari persamaan (4.8) yang dapat ditulis:

Untuk orde 0, $p = p^2 = \cdots = p^n = 0$

$$
\begin{aligned}
p^0 \rightarrow \quad & v_{1,0}' - y_1'(0) = 0 \\
& v_{2,0}' - y_2'(0) = 0 \\
& \quad \vdots \\
& v_{n,0}' - y_n'(0) = 0
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

Untuk orde 1, $p^1 \neq 0$ dan $p^2 = p^3 = \cdots = p^n = 0$

$$
\begin{aligned}
p^1 \rightarrow \quad & v_{1,1}' - f_1(x, v_{1,0}, v_{2,0}, \cdots v_{n,0}) = 0 \\
& v_{2,1}' - f_2(x, v_{1,0}, v_{2,0}, \cdots v_{n,0}) = 0 \\
& \qquad \vdots \\
& v_{n,1}' - f_n(x, v_{1,0}, v_{2,0}, \cdots, v_{n,0}) = 0
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

Untuk orde 2, $p^2 \neq 0$ dan $p^3 = p^4 \cdots = p^n = 0$

$$
\begin{aligned}
p^2 \rightarrow \quad & v_{1,2}' - f_1(x, v_{1,1}, v_{2,1}, \cdots, v_{n,1}) = 0 \\
& v_{2,2}' - f_2(x, v_{1,1}, v_{2,1}, \cdots, v_{n,1}) = 0 \\
& \qquad \vdots \\
& v_{n,2}' - f_n(x, v_{1,1}, v_{2,1}, \cdots, v_{n,1}) = 0
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

Untuk orde n , $p^n \neq 0$ dan $p^{n+1} = \cdots = p^{n+m} = 0$

$$
\begin{aligned}
p^n \rightarrow \quad & v_{1,m}' - f_1(x, v_{1,m}, v_{2,m}, \cdots, v_{n,m}) = 0 \\
& v_{2,m}' - f_2(x, v_{1,m}, v_{2,m}, \cdots, v_{n,m}) = 0 \\
& \qquad \vdots \\
& v_{n,m}' - f_n(x, v_{1,m}, v_{2,m}, \cdots, v_{n,m}) = 0
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

Selanjutnya dengan diterapkan *invers* operator ke dalam persamaan (4.9) – (4.12) sehingga:

Untuk orde 0, $p = p^2 = p^3 = \cdots = p^n = 0$

$$
\begin{aligned}
p^0 \rightarrow \quad & v_{1,0} = y_1(0) \\
& v_{2,0} = y_2(0) \\
& \qquad \vdots \\
& v_{n,0} = y_n(0)
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Untuk orde 1, $p^1 \neq 0$ dan $p^2 = p^3 = \cdots = p^n = 0$

$$
\begin{aligned}
p^1 \rightarrow \quad & v_{1,1} = L_x^{-1} f_1(x, v_{1,0}, v_{2,0}, \cdots, v_{n,0}) \\
& v_{2,1} = L_x^{-1} f_2(x, v_{1,0}, v_{2,0}, \cdots, v_{n,0}) \\
& \qquad \qquad \vdots \\
& v_{n,1} = L_x^{-1} f_n(x, v_{1,0}, v_{2,0}, \cdots v_{n,0})
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Untuk orde 2, $p^2 \neq 0$ dan $p^3 = p^4 = \cdots = p^n = 0$

$$
\begin{aligned}
p^2 \rightarrow \quad & v_{1,2} = L_x^{-1} f_1(x, v_{1,1}, v_{2,1}, \cdots, v_{n,1}) \\
& v_{2,2} = L_x^{-1} f_2(x, v_{1,1}, v_{2,1}, \cdots, v_{n,1}) \\
& \qquad \qquad \vdots \\
& v_{n,2} = L_x^{-1} f_n(x, v_{1,1}, v_{2,1}, \cdots, v_{n,1})
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

$$\vdots$$

Untuk orde n, $p^n \neq 0$ dan $p^{n+1} = \cdots = p^{n+m} = 0$

$$
\begin{aligned}
p^n \rightarrow \quad & v_{1,m} = L_x^{-1} f_1(x, v_{1,m}, v_{2,m}, \cdots, v_{n,m}) \\
& v_{2,m} = L_x^{-1} f_2(x, v_{1,m}, v_{2,m}, \cdots, v_{n,m}) \\
& \qquad \qquad \vdots \\
& v_{n,m} = L_x^{-1} f_n(x, v_{1,m}, v_{2,m}, \cdots, v_{n,m})
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Selanjutnya setelah nilai suku-suku $v_{1,0}(x), v_{1,1}(x), \cdots, v_{1,m}(x)$, $v_{2,0}(x), v_{2,1}(x), \cdots, v_{2,m}(x)$ dan $v_{n,0}(x), v_{n,1}(x), \cdots, v_{n,m}(x)$ dari persamaan (2.13) – (2.16) diketahui, maka penyelesaian dapat diperoleh dengan menggunakan hampiran sebagai berikut:

$$y_1(x) = \lim_{p\to 1} v_1(x) = \sum_{m=0}^{n-1} v_{1,m}(x)$$

$$y_2(x) = \lim_{p\to 1} v_2(x) = \sum_{m=0}^{n-1} v_{2,m}(x)$$

$$\vdots$$

$$y_n(x) = \lim_{p\to 1} v_n(x) = \sum_{m=0}^{n-1} v_{n,m}(x)$$

Contoh 4.1

Tentukan penyelesaian persamaan eksak dari persamaan diferensial aljabar nonlinear berikut:

$$y_1' - 2y_2^{\,2} = 0$$

$$y_2' - y_2 = 0$$

$$y_3' - y_1 = 0 \qquad (4.17)$$

dengan nilai awalnya $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 0$ dan penyelesaian eksak $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^x$ dan $y_3 = xe^x$.

<u>Penyelesaian</u>

Persamaan (4.17) diubah kedalam persamaan homotopi sehingga diperoleh:

$$H(v_1, p) = v_1' - y_1'(0) + p\left(-2v_2\right) = 0$$

$$H(v_2, p) = v_2' - y_2'(0) + p\left(-v_2\right) = 0$$

$$H(v_3, p) = v_3' - y_3'(0) + p\left(-v_1\right) = 0 \qquad (4.18)$$

Substitusikan persamaan (4.6) ke dalam persamaan (4.18) sehingga diperoleh:

$$H(v_1, p) = (v_{1,0}' + pv_{1,1}' + p^2 v_{1,2}' + \cdots) - y_1'(0) + p\left(-2(v_{2,0} + pv_{2,1} + p^2 v_{2,2} + \cdots)^2\right) = 0$$

$$H(v_2, p) = (v_{2,0}' + pv_{2,1}' + p^2 v_{2,2}' + \cdots) - y_2'(0) + p\left(-(v_{2,0} + pv_{2,1} + p^2 v_{2,2} + \cdots)\right) = 0$$

$$H(v_3, p) = (v'_{3,0} + pv'_{3,1} + p^2 v'_{3,2} + \cdots) - y'_3(0)$$
$$+ p\big(-(v_{1,0} + pv_{1,1} + p^2 v_{1,2} + \cdots)\big) = 0 \qquad (4.19)$$

Selanjutnya setelah mengumpulkan orde yang sama dari pertubasi *p*, kemudian menentukan suku-suku $v_{1,0}(x), v_{1,1}(x), \cdots, v_{1,m}(x)$, $v_{2,0}(x), v_{2,1}(x), \cdots, v_{2,m}$ dan $v_{n,0}(x), v_{n,1}(x), \cdots, v_{n,m}(x)$ dari persamaan (4.19) maka diperoleh:

Untuk orde 0 , $p = p^2 = \cdots = p^n = 0$

$$p^0 \rightarrow \quad v_{1,0}(0) = 1$$
$$v_{2,0}(0) = 1$$
$$v_{3,0}(0) = 0 \qquad (4.20)$$

Untuk orde 1, $p \neq 0$, $p^2 = p^3 = \cdots = p^n = 0$

$$p^1 \rightarrow \quad v'_{1,1}(x) = 2(v_{2,0})^2$$
$$v'_{2,1}(x) = v_{2,0}$$
$$v'_{3,1}(x) = y_{1,0} \qquad (4.21)$$

Penyelesaian dari persamaan (4.21) diperoleh:

$$v_{1,1}(x) = \int_0^x 2dx = 2x$$
$$v_{2,1}(x) = \int_0^x 1dx = x$$
$$v_{3,1}(x) = \int_0^x 1dx = x \qquad (4.22)$$

Untuk orde 2, $p^2 \neq 0$, $p^3 = p^4 = \cdots = p^n = 0$

$$p^2 \rightarrow \quad v'_{1,2}(x) = 2(2v_{2,0}v_{2,1})$$
$$v'_{2,2}(x) = v_{2,1}$$
$$v'_{3,2}(x) = v_{1,1} \qquad (4.23)$$

Penyelesaian dari persamaan (4.23) diperoleh:

$$v_{1,2}(x) = \int_0^x 2(2x)dx = 2x^2$$

$$v_{2,2}(x)=\int_0^x x dx=\frac{1}{2}x^2$$

$$v_{3,2}(x)=\int_0^x 2x dx=x^2 \tag{4.24}$$

Untuk orde 3, $p^3 \neq 0$, $p^4 = p^5 = \cdots = p^n = 0$

$$p^3 \rightarrow \quad v'_{1,3}(x)=2(2v_{2,0}v_{2,2}+(v_{2,1})^2)$$

$$v'_{2,3}(x)=v_{2,2}$$

$$v'_{3,3}(x)=v_{1,2} \tag{4.25}$$

Penyelesaian dari persamaan (4.25) diperoleh:

$$v_{1,3}(x)=\int_0^x 2(2v_{2,0}v_{2,2}+(v_{2,1})^2)dx=\frac{4}{3}x^3$$

$$v_{2,3}(x)=\int_0^x \frac{1}{2}x^2 dx=\frac{1}{6}x^3$$

$$v_{3,3}(x)=\int_0^x 2x^2 dx=\frac{2}{3}x^3 \tag{4.26}$$

Untuk orde 4, $p^4 \neq 0$, $p^5 = p^6 = \cdots = p^n = 0$

$$p^4 \rightarrow \quad v'_{1,4}(x)=2(2v_{2,0}v_{2,3}+2v_{2,1}v_{2,2})$$

$$v'_{2,4}(x)=v_{2,3}$$

$$v'_{3,4}(x)=v_{1,3} \tag{4.27}$$

Penyelesaian dari persamaan (4.27) diperoleh:

$$v_{1,4}(x)=\int_0^x 2(2v_{2,0}v_{2,3}+2v_{2,1}v_{2,2})dx=\frac{2}{3}x^4$$

$$v_{2,4}(x)=\int_0^x \frac{1}{6}x^3 dx=\frac{1}{24}x^4$$

$$v_{3,4}(x)=\int_0^x \frac{4}{3}x^3 dx=\frac{1}{3}x^4 \tag{4.28}$$

Untuk orde 5, $p^5 \neq 0$, $p^6 = p^7 = \cdots = p^n = 0$

$$p^5 \rightarrow \quad v'_{1,5}(x)=2(2v_{2,0}v_{2,4}+2v_{2,1}v_{2,3}+(v_{2,2})^2)$$

$$v'_{2,5}(x)=v_{2,4}$$

$$v'_{3,5}(x) = v_{1,4} \tag{4.29}$$

Penyelesaian dari persamaan (4.29) diperoleh:

$$v_{1,5}(x) = \int_0^x 2(2v_{2,0}v_{2,4} + 2v_{2,1}v_{2,3} + (v_{2,2})^2)dx = \frac{4}{15}x^5$$

$$v_{2,5}(x) = \int_0^x \frac{1}{24}x^4 dx = \frac{1}{120}x^5$$

$$v_{3,5}(x) = \int_0^x \frac{2}{3}x^4 dx = \frac{2}{15}x^5 \tag{4.30}$$

$$\vdots$$

Penyelesaian persamaan (4.21) – (4.30) diperoleh dengan cara menjumlahkan suku $v_{1,0}(x), v_{1,1}(x), \cdots, v_{1,m}(x)$, $v_{2,0}(x), v_{2,1}(x), \cdots, v_{2,m}$ dan $v_{3,0}(x), v_{3,1}(x), \cdots, v_{3,m}$ ditulis sebagai berikut:

$$y_1(x) = v_{1,0} + v_{1,1} + v_{1,2} + \cdots$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{45}x^6 + \frac{8}{315}x^7 + \cdots$$

$$y_2(x) = v_{2,0} + v_{2,1} + v_{2,2} + \cdots$$

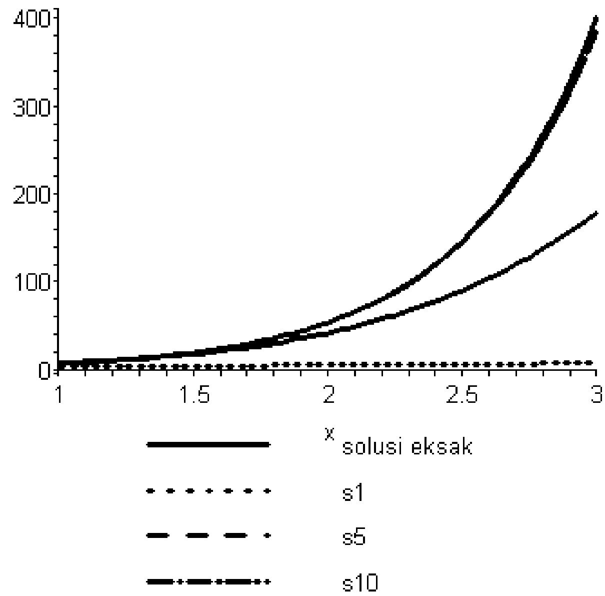
$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \cdots$$

$$y_3(x) = v_{3,0} + v_{3,1} + v_{3,2} + \cdots$$

$$= x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{2}{45}x^6 + \frac{4}{315}x^7 + \frac{1}{315}x^8 + \cdots$$

Akurasi penyelesaian persamaan (4.17) bergantung pada banyaknya suku yang dijumlahkan.

Gambar 4.1 di bawah ini menunjukan bahwa akurasi penyelesaian $y_1(x)$ yang diperoleh dengan menggunakan metode pertubasi homotopi untuk beberapa suku terhadap penyelesaian eksak persamaan diferensial aljabar nonlinear.



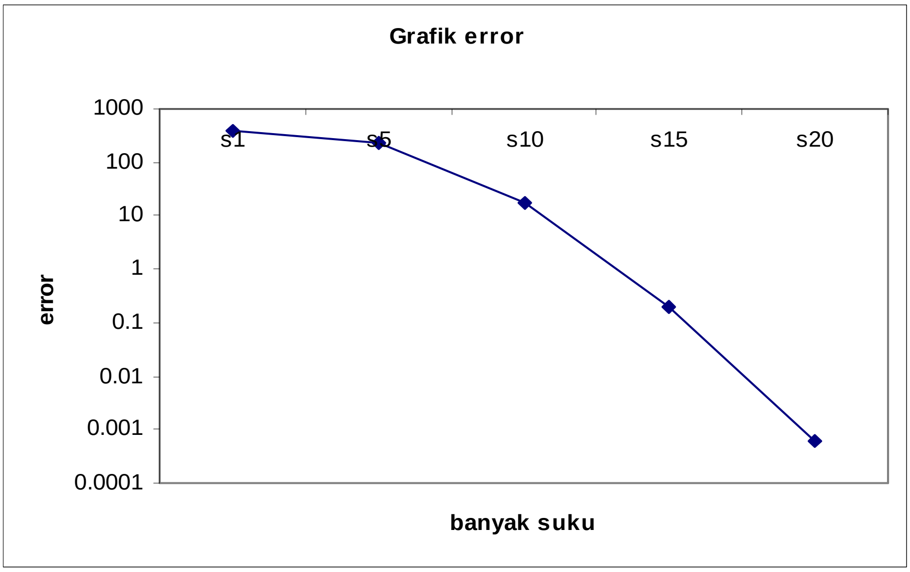
Gambar 4.1. Hampiran penyelesaian persamaan diferensial aljabar nonlinear $y_1(x)$ dengan $y_1(0)=1$ untuk beberapa jumlah suku.

Berdasarkan Gambar 4.1 di atas, dapat dilihat bahwa kurva yang dibentuk oleh hampiran 10 suku lebih mendekati solusi eksak dibandingkan kurva-kurva lainnya dengan $x=1,\cdots,3$. Hal ini menunjukan bahwa suku lebih banyak akan mendekati kurva penyelesaian eksak.

Tabel 4.1 Perbandingan *error* ε_n dengan solusi eksak untuk $y_1(x)$

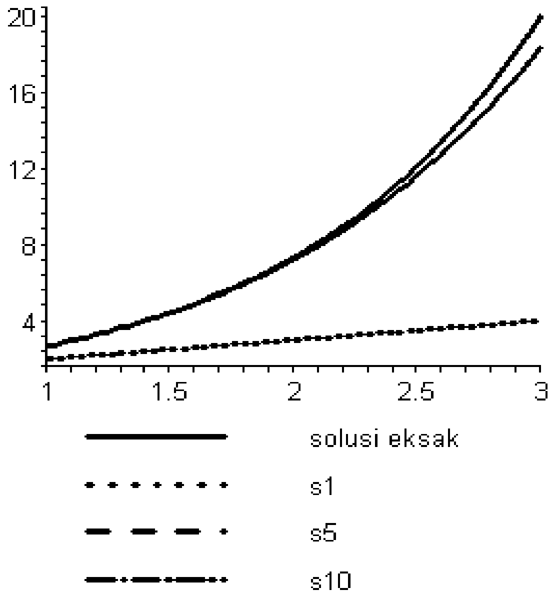
$x=3$	$y_1(x)$
Eksak	403,4287935
ε_1	396,4287935
ε_5	223,6287935
ε_{10}	17,19450780
ε_{15}	0,2053848
ε_{20}	0,0005869

Bedasarkan Tabel 4.1 di atas, tabel perbandingan *error* dengan solusi eksak di $x = 3$ dapat dilihat bahwa ε_{20} lebih memperkecil *error* dari $y_1(x)$. Semakin besar suku maka *error* akan semakin kecil. Sedangkan untuk memperlihatkan *error* yang dihasilkan oleh beberapa kurva terhadap solusi eksak dapat dilihat pada Gambar 4.2.



Gambar 4.2. Kecepatan metode pertubasi homotopi menghampiri persamaan diferensial aljabar nonlinear $y_1(x)$ dengan $y_1(0) = 1$ di $x = 3$ untuk beberapa jumlah suku.

Sedangkan untuk menunjukan bahwa akurasi penyelesaian $y_2(x)$ yang diperoleh dengan menggunakan metode pertubasi homotopi untuk beberapa suku terhadap penyelesaian eksak persamaan diferensial aljabar nonlinear, dapat dilihat pada gambar 4.3.



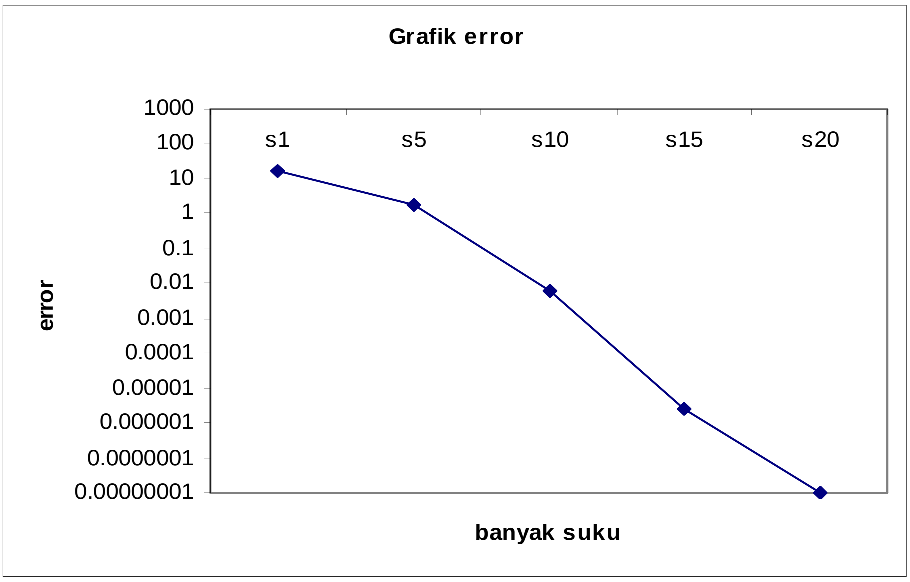
Gambar 4.3. Hampiran penyelesaian persamaan diferensial aljabar nonlinear $y_2(x)$ dengan $y_2(0)=1$ untuk beberapa jumlah suku.

Berdasarkan Gambar 4.3 di atas, dapat dilihat bahwa kurva yang dibentuk oleh hampiran 10 suku lebih mendekati solusi eksak dibandingkan kurva-kurva lainnya, dengan $x=1,\cdots,3$. Hal ini menunjukan bahwa suku lebih banyak akan mendekati kurva penyelesaian eksak.

Tabel 4.2 Perbandingan *error* ε_n dengan solusi eksak untuk $y_2(x)$

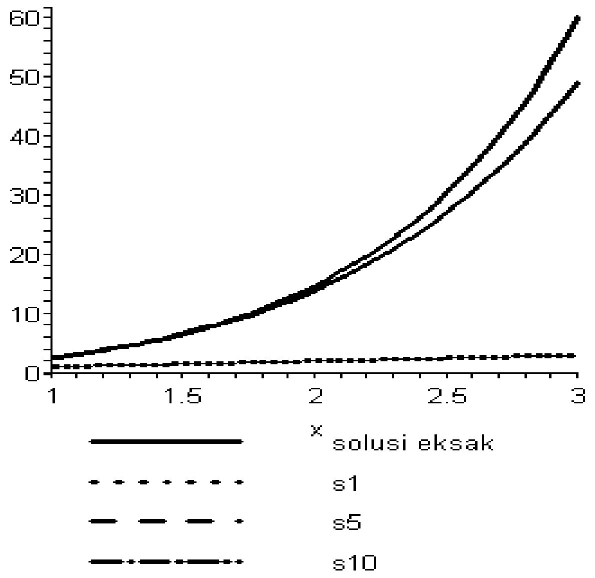
$x=3$	$y_2(x)$
Eksak	20,08553692
ε_1	16,08553692
ε_5	1,68553692
ε_{10}	0,00587175
ε_{15}	0,00000250
ε_{20}	1×10^{-8}

Berdasarkan Tabel 4.2 di atas, tabel perbandingan *error* dengan solusi eksak di $x = 3$ dapat dilihat bahwa ε_{20} lebih memperkecil *error* dari $y_2(x)$. Semakin besar suku maka *error* akan semakin kecil. Sedangkan untuk memperlihatkan *error* yang dihasilkan oleh beberapa kurva terhadap solusi eksak, dilihat pada Gambar 4.4.



Gambar 4.4. Kecepatan metode pertubasi homotopi menghampiri persamaan diferensial aljabar nonlinear $y_2(x) = 0$ dengan $y_2(0) = 1$ di $x = 3$ untuk beberapa jumlah suku.

Sedangkan untuk menunjukan bahwa akurasi penyelesaian $y_3(x)$ yang diperoleh dengan menggunakan metode pertubasi homotopi untuk beberapa suku terhadap penyelesaian eksak persamaan diferensial aljabar nonlinear, dapat dilihat pada Gambar 4.5.



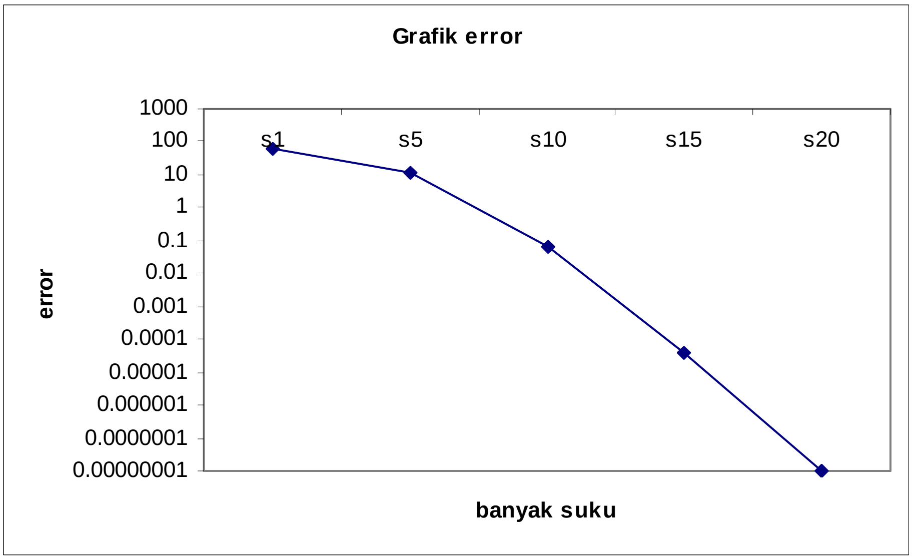
Gambar 4.5. Hampiran penyelesaian persamaan diferensial aljabar nonlinear $y_3(x)$ dengan $y_3(0)=0$ untuk beberapa jumlah suku.

Berdasarkan Gambar 4.5 di atas, dapat dilihat bahwa kurva yang dibentuk oleh hampiran 10 suku lebih mendekati solusi eksak dibandingkan kurva-kurva lainnya, dengan $x=1,\cdots,3$. Hal ini menunjukan bahwa suku lebih banyak akan mendekati kurva penyelesaian eksak.

Tabel 4.3 Perbandingan *error* ε_n dengan solusi eksak untuk $y_3(x)$

$x=3$	$y_3(x)$
Eksak	60,25661076
ε_1	57,25661076
ε_5	11,13161076
ε_{10}	0,06643220
ε_{15}	0,00004040
ε_{20}	1×10^{-8}

Bedasarkan Tabel 4.3 di atas, tabel perbandingan *error* dengan solusi eksak di $x = 3$ dapat dilihat bahwa ε_{20} lebih memperkecil *error* dari $y_3(x)$. Semakin besar suku maka *error* akan semakin kecil. Sedangkan untuk memperlihatkan *error* yang dihasilkan oleh beberapa kurva terhadap solusi eksak, dilihat pada Gambar 4.6.



Gambar 4.6. Kecepatan metode pertubasi homotopi menghampiri persamaan diferensial aljabar nonlinear $y_3(x)$ dengan $y_3(0) = 0$ di $x = 3$ untuk beberapa jumlah suku.

Contoh 4.2

Tentukan penyelesaian eksak dari persamaan diferensial aljabar linear berikut:

$$y_1' = 3y_1 + y_2 - 2y_3$$

$$y_2' = -y_1 + 2y_2 + y_3$$

$$y_3' = 4y_1 + y_2 - 3y_3 \qquad (4.31)$$

dengan nilai awal $y_1(0) = -6$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = -12$, dan penyelesaian eksak $y_1 = -7e^{-x} + e^x$, $y_2 = 2e^{-x}$ dan $y_3 = -13e^{-x} + e^x$.

Penyelesaian

Persamaan (4.31) diubah kedalam persamaan homotopi sehingga diperoleh:

$$H(v_1, p) = v_1' - y_1'(0) + p\left(-3v_1 - v_2 + 2v_3\right) = 0$$

$$H(v_2, p) = v_2' - y_2'(0) + p\left(v_1 - 2v_2 - v_3\right) = 0$$

$$H(v_3, p) = v_3' - y_n'(0) + p\left(-4v_1 - v_2 + 3v_3\right) = 0 \qquad (4.32)$$

Substitusikan persamaan (4.6) kedalam persamaan (4.32) sehingga diperoleh:

$$H(v_1, p) = (v_{1,0}' + pv_{1,1}' + p^2 v_{1,2}' + \cdots) - y_1'(0) + p\Big(-3(v_{1,0} + pv_{1,1} + p^2 v_{1,2}) -$$
$$(y_{2,0} + py_{2,1} + p^2 y_{2,2} + \cdots) + 2(y_{3,0} + py_{3,1} + p^2 y_{3,2})\Big) = 0$$

$$H(v_2, p) = (v_{2,0}' + pv_{2,1} + p^2 v_{2,2} + \cdots) - y_2'(0) + p\Big((v_{1,0} + pv_{1,1} + p^2 v_{1,2}) -$$
$$2(v_{2,0} + pv_{2,1} + p^2 v_{2,2} + \cdots) - (v_{3,0} + pv_{3,1} + p^2 v_{3,2})\Big) = 0$$

$$H(v_3 . p) = (v_{3,0}' + pv_{3,1}' + p^2 v_{3,2}' + \cdots) - y_3'(0) + p\Big(-4(v_{1,0} + pv_{1,1} + p^2 v_{1,2}) -$$
$$(v_{2,0} + pv_{2,1} + p^2 v_{2,2} + \cdots) + 3(v_{3,0} + pv_{3,1} + p^2 v_{3,2})\Big) = 0 \qquad (4.33)$$

Selanjutnya setelah mengumpulkan orde yang sama dari pertubasi *p*, kemudian menentukan suku-suku $v_{1,0}(x), v_{1,1}(x), \cdots, v_{1,m}(x)$, $v_{2,0}(x), v_{2,1}(x), \cdots, v_{2,m}$ dan $y_{n,0}(x), y_{n,1}(x), \cdots, y_{n,m}(x)$ dari persamaan (4.33) maka diperoleh:

Untuk orde 0, $p = p^2 = \cdots = p^n = 0$

$$p^0 \rightarrow \quad v_{1,0}(0) = -6$$
$$v_{2,0}(0) = 2$$
$$v_{3,0}(0) = -12 \qquad (4.34)$$

Untuk orde 1, $p \neq 0$, $p^2 = p^3 = \cdots = p^n = 0$

$$p^1 \rightarrow \quad v_{1,1}'(x) = 3v_{1,0} + v_{2,0} - 2v_{3,0}$$
$$v_{2,1}'(x) = -v_{1,0} + 2v_{2,0} + v_{3,0}$$
$$v_{3,1}'(x) = 4v_{1,0} + v_{2,0} - 3v_{3,0} \qquad (4.35)$$

Penyelesaian dari persamaan (4.35) diperoleh:

$$v_{1,1}(x)=\int_0^x (3v_{1,0}+v_{2,0}-2v_{3,0})dx = 8x$$

$$v_{2,1}(x)=\int_0^x (-v_{1,0}+2v_{2,0}+v_{3,0})dx = -2x$$

$$v_{3,1}(x)=\int_0^x (4v_{1,0}+v_{2,0}-3v_{3,0})dx = 14x \qquad (4.36)$$

Untuk orde 2, $p^2 \neq 0$, $p^3 = p^4 = \cdots = p^n = 0$

$$p^2 \rightarrow \quad v'_{1,2}(x) = 3v_{1,1} + v_{2,1} - 2v_{3,1}$$

$$v'_{2,2}(x) = -v_{1,1} + 2v_{2,1} + v_{3,1}$$

$$v'_{3,1}(x) = 4v_{1,1} + v_{2,1} - 3v_{3,1} \qquad (4.37)$$

Penyelesaian dari persamaan (4.37) diperoleh:

$$v_{1,2}(x)=\int_0^x (3v_{1,1}+v_{2,1}-2v_{3,1})dx = -3x^2$$

$$v_{2,2}(x)=\int_0^x (-v_{1,1}+2v_{2,1}+v_{3,1})dx = x^2$$

$$v_{3,2}(x)=\int_0^x (4v_{1,1}+v_{2,1}-3v_{3,1})dx = -16x^2 \qquad (4.38)$$

Untuk orde 3, $p^3 \neq 0$, $p^4 = p^5 \cdots = p^n = 0$

$$p^3 \rightarrow \quad v'_{1,3}(x) = 3v_{1,2} + v_{2,2} - 2v_{3,2}$$

$$v'_{2,3}(x) = -v_{1,2} + 2v_{2,2} + v_{3,2}$$

$$v'_{3,3}(x) = 4v_{1,2} + v_{2,2} - 3v_{3,2} \qquad (4.39)$$

Penyelesaian dari persamaan (4.39) diperoleh:

$$v_{1,3}(x)=\int_0^x (3v_{1,2}+v_{2,2}-2v_{3,2})dx = \frac{4}{3}x^3$$

$$v_{2,3}(x)=\int_0^x (-v_{1,2}+2v_{2,2}+v_{3,2})dx = -\frac{1}{3}x^3$$

$$v_{3,3}(x)=\int_0^x (4v_{1,2}+v_{2,2}-3v_{3,2})dx = \frac{7}{3}x^3 \qquad (4.40)$$

Untuk orde 4, $p^4 \neq 0$, $p^5 = p^6 = \cdots = p^n = 0$

$$p^4 \rightarrow \quad v'_{1,4}(x) = 3v_{1,3} + v_{2,3} - 2v_{3,3}$$

$$v'_{2,4}(x) = -v_{1,3} + 2v_{2,3} + v_{3,3}$$

$$v'_{3,4}(x) = 4v_{1,3} + v_{2,3} - 3v_{3,3} \qquad (4.40)$$

Penyelesaian dari persamaan (4.40) diperoleh:

$$v_{1,4}(x) = \int_0^x (3v_{1,3} + v_{2,3} - 2v_{3,3})dx = -\frac{1}{4}x^4$$

$$v_{2,4}(x) = \int_0^x (-v_{1,3} + 2v_{2,3} + v_{3,3})dx = \frac{1}{12}x^4$$

$$v_{3,4}(x) = \int_0^x (4v_{1,3} + v_{2,3} - 3v_{3,3})dx = -\frac{1}{2}x^4 \qquad (4.41)$$

Untuk orde 5, $p^5 \neq 0$, $p = p^2 = \cdots = p^n = 0$

$$p^5 \rightarrow \quad v'_{1,5}(x) = 3v_{1,4} + v_{2,4} - 2v_{3,4}$$

$$v'_{2,5}(x) = -v_{1,4} + 2v_{2,4} + v_{3,4}$$

$$v'_{3,5}(x) = 4v_{1,4} + v_{2,4} - 3v_{3,4} \qquad (4.42)$$

Penyelesaian dari persamaan (4.42) diperoleh:

$$v_{1,5}(x) = \int_0^x (3v_{1,4} + v_{2,4} - 2v_{3,4})dx = \frac{1}{15}x^5$$

$$v_{2,5}(x) = \int_0^x (-v_{1,4} + 2v_{2,4} + v_{3,4})dx = -\frac{1}{60}x^5$$

$$v_{3,5}(x) = \int_0^x (4v_{1,4} + v_{2,4} - 3v_{3,4})dx = \frac{7}{60}x^5 \qquad (4.43)$$

$$\vdots$$

Penyelesaian persamaan (4.34) – (4.43) diperoleh dengan cara menjumlahkan suku $v_{1,0}(x), v_{1,1}(x), \cdots, v_{1,m}(x)$, $v_{2,0}(x), v_{2,1}(x), \cdots, v_{2,m}$ dan $v_{3,0}(x), v_{3,1}(x), \cdots, v_{3,m}$ ditulis sebagai berikut:

$$y_1(x) = v_{1,0}(x) + v_{1,1}(x) + v_{1,2}(x) + v_{1,3}(x) + v_{1,4}(x) + v_{1,5}(x) + \cdots$$

$$= -6 + 8x - 3x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{120}x^6 + \frac{1}{630}x^7 - \cdots$$

$$y_2(x) = v_{2,0}(x) + v_{2,1}(x) + v_{2,2}(x) + v_{2,3}(x) + v_{2,4}(x) + v_{2,5}(x) + \cdots$$

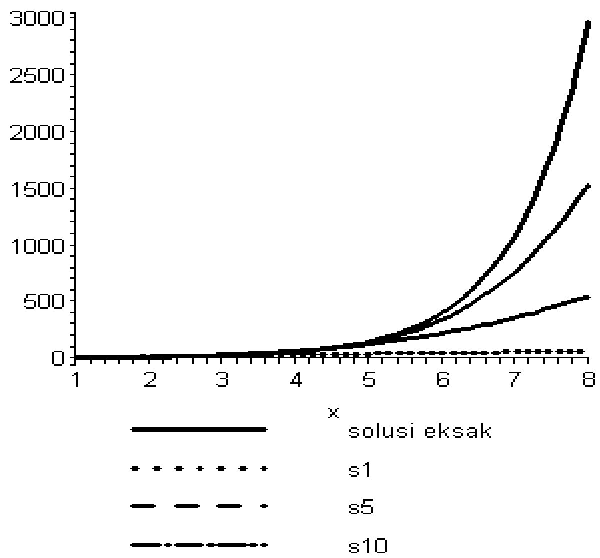
$$= 2 - 2x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{360}x^6 - \frac{1}{2520}x^7 + \cdots$$

$$y_3(x) = v_{3,0}(x) + v_{3,1}(x) + v_{3,2}(x) + v_{3,3}(x) + v_{3,4}(x) + v_{3,5}(x) + \cdots$$

$$= -12 + 14x - 6x^2 + \frac{7}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{7}{60}x^5 - \frac{1}{60}x^6 + \frac{1}{360}x^7 - \cdots$$

Akurasi penyelesaian dari persamaan (4.31) bergantung kepada banyaknya suku yang dijumlahkan.

Gambar 4.7 di bawah ini menunjukan bahwa akurasi penyelesaian $y_1(x)$ yang diperoleh dengan menggunakan metode pertubasi homotopi untuk beberapa suku terhadap penyelesaian eksak persamaan diferensial aljabar linear.



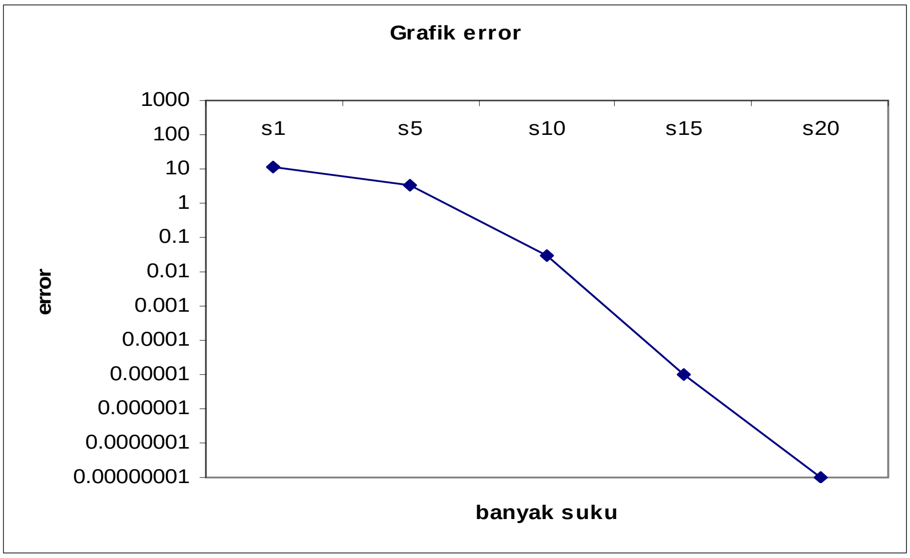
Gambar 4.7. Hampiran penyelesaian persamaan diferensial aljabar linear $y_1(x)$ dengan $y_1(0) = -6$ untuk beberapa jumlah suku.

Berdasarkan Gambar 4.7 di atas, dapat dilihat bahwa kurva yang dibentuk oleh hampiran 10 suku lebih mendekati solusi eksak dibandingkan kurva-kurva lainnya, dengan $x = 1, \cdots, 8$. Hal ini menunjukan bahwa suku lebih banyak akan mendekati kurva penyelesaian eksak.

Tabel 4.4 Perbandingan *error* ε_n dengan solusi eksak untuk $y_1(x)$

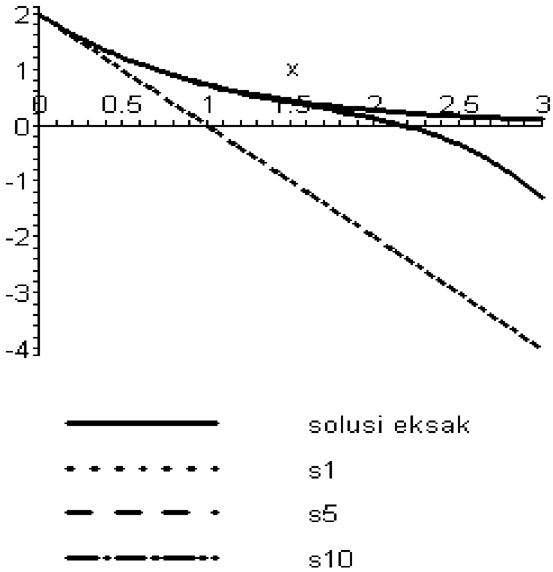
$x = 3$	$y_1(x)$
Eksak	19,73702744
ε_1	10,73702744
ε_5	3,21297256
ε_{10}	0,03064352
ε_{15}	0,00000972
ε_{20}	1×10^{-8}

Berdasarkan Tabel 4.4 di atas, tabel perbandingan *error* dengan solusi eksak di $x = 3$ dapat dilihat bahwa ε_{20} lebih memperkecil *error* dari $y_1(x)$. Semakin besar suku maka *error* akan semakin kecil. Sedangkan untuk memperlihatkan *error* yang dihasilkan oleh beberapa kurva terhadap solusi eksak, dilihat pada Gambar 4.8.



Gambar 4.8. Kecepatan metode pertubasi homotopi menghampiri persamaan diferensial aljabar linear $y_1(x)$ dengan $y_1(0) = -6$ di $x = 3$ untuk beberapa jumlah suku.

Sedangkan untuk menunjukan bahwa akurasi penyelesaian $y_2(x)$ yang diperoleh dengan menggunakan metode pertubasi homotopi untuk beberapa suku terhadap penyelesaian eksak persamaan diferensial aljabar linear dapat dilihat pada Gambar 4.9.



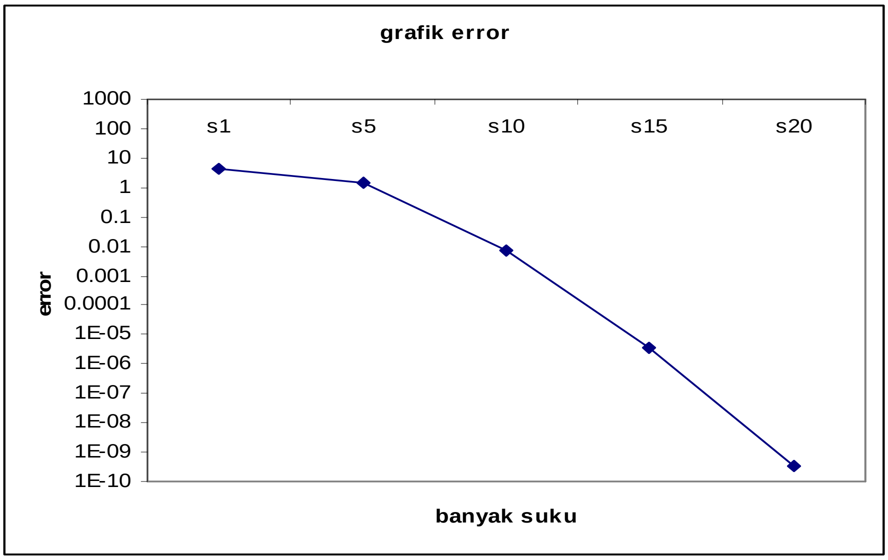
Gambar 4.9 Hampiran penyelesaian persamaan diferensial aljabar linear $y_2(x)$ dengan $y_2(0) = 2$ untuk beberapa jumlah suku.

Berdasarkan Gambar 4.9 di atas, dapat dilihat bahwa kurva yang dibentuk oleh hampiran 10 suku lebih mendekati solusi eksak dibandingkan kurva-kurva lainnya, dengan $x = 1, \cdots, 3$. Hal ini menunjukan bahwa suku lebih banyak akan mendekati kurva penyelesaian eksak.

Tabel 4.5 Perbandingan *error* ε_n dengan solusi eksak untuk $y_2(x)$

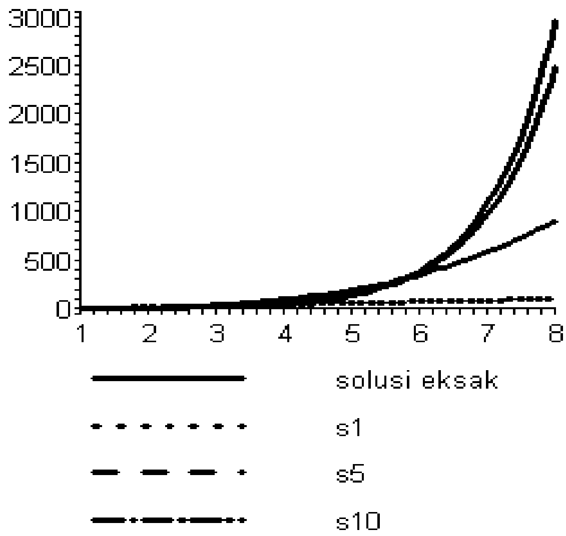
$x=3$	$y_2(x)$
Eksak	4,509712514
ε_1	4,099574137
ε_5	1,399574137
ε_{10}	0,00707764896
ε_{15}	0,00000349312
ε_{20}	$3{,}4\times10^{-10}$

Berdasarkan Tabel 4.5 di atas, tabel perbandingan *error* dengan solusi eksak di $x=3$ dapat dilihat bahwa ε_{20} lebih memperkecil *error* dari $y_2(x)$. Semakin besar suku maka *error* akan semakin kecil. Sedangkan untuk memperlihatkan *error* yang dihasilkan oleh beberapa kurva terhadap solusi eksak, dilihat pada Gambar 4.10.



Gambar 4.10. Kecepatan metode pertubasi homotopi menghampiri persamaan diferensial aljabar linear $y_2(x)$ dengan $y_2(0)=2$ di $x=3$ untuk beberapa jumlah suku.

Sedangkan untuk menunjukan bahwa akurasi penyelesaian $y_3(x)$ yang diperoleh dengan menggunakan metode pertubasi homotopi untuk beberapa suku terhadap penyelesaian eksak persamaan diferensial aljabar linear, dapat dilihat pada Gambar 4.11.



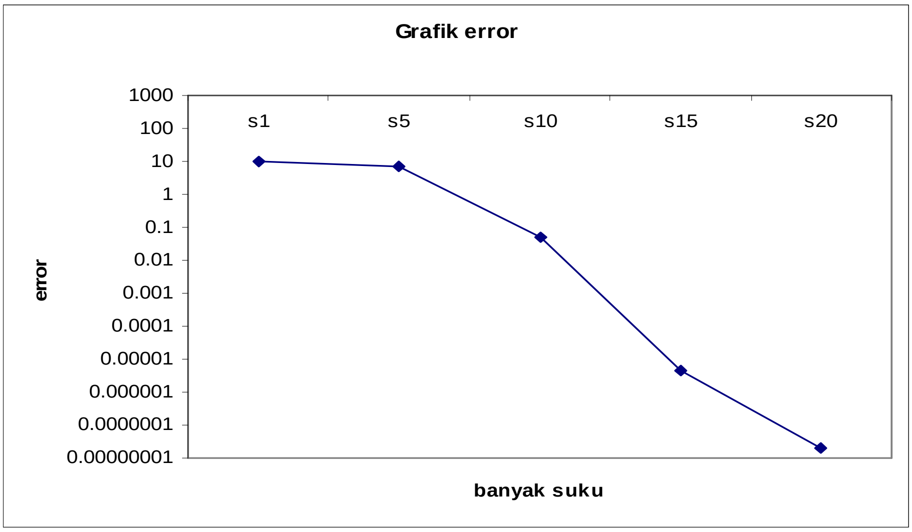
Gambar 4.11. Hampiran penyelesaian persamaan diferensial aljabar linear $y_3(x)$ dengan $y_3(0) = -12$ untuk beberapa jumlah suku.

Berdasarkan Gambar 4.10 di atas, dapat dilihat bahwa kurva yang dibentuk oleh hampiran 10 suku lebih mendekati solusi eksak dibandingkan kurva-kurva lainnya dengan $x = 1, \cdots, 8$. Hal ini menunjukan bahwa suku lebih banyak akan mendekati kurva penyelesaian eksak. Hal ini menunjukan bahwa suku lebih banyak akan mendekati kurva penyelesaian eksak.

Tabel 4.6 Perbandingan *error* ε_n dengan solusi eksak untuk $y_3(x)$

$x=3$	$y_3(x)$
Eksak	19,43830503
ε_1	10,56169497
ε_5	7,41169497
ε_{10}	0,05187646
ε_{15}	0,00000448
ε_{20}	2×10^{-8}

Berdasarkan Tabel 4.6 di atas, tabel perbandingan *error* dengan solusi eksak di $x=3$ dapat dilihat bahwa ε_{20} lebih memperkecil *error* dari $y_3(x)$. Semakin besar suku maka *error* akan semakin kecil. Sedangkan untuk memperlihatkan *error* yang dihasilkan oleh beberapa kurva terhadap solusi eksak, dilihat pada Gambar 4.12.



Gambar 4.12. Kecepatan metode pertubasi homotopi menghampiri persamaan diferensial aljabar linear $y_3(x)$ dengan $y_3(0)=2$ di $x=3$ untuk beberapa jumlah suku.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan dari Tugas Akhir ini dapat diambil kesimpulan sebagai berikut

a. Metode pertubasi homotopi dapat menyelesaikan persamaan diferensial aljabar nonlinier dan linear $f(x, y, y') = 0$, berdasarkan masalah nilai awal $y_1(0) = c_1$, $y_2(0) = c_2$ dan $y_n(0) = c_n$.

b. Dengan menggunakan metode pertubasi homotopi hasil yang diperoleh semakin mendekati eksak, dapat dilihat pada Gambar 4.1, Gambar 4.3 dan Gambar 4.5 pada contoh soal 4.1 dan Gambar 4.7, Gambar 4.9 dan Gambar 4.11 untuk contoh soal 4.2.

c. Hasilnya akan cukup akurat dan efektif atau dapat memperkecil error jika jumlah suku-suku $v_{1,0}(x), v_{1,1}(x), v_{1,2}(x), \cdots$, $v_{2,0}(x)_{2,1}(x), v_{2,2}(x), \cdots$, dan $v_{n,0}(x), v_{n,1}(x), v_{n,2}(x), \cdots$, yang digunakan semakin banyak, yang dapat dilihat pada Gambar 4.2, Gambar 4.4 dan Gambar 4.6 untuk contoh soal 4.1 dan Gambar 4.8, Gambar 4.10 dan Gambar 4.12 untuk contoh soal 4.2 dan dapat dilihat pada Tabel 4.1, Tabel 4.2 dan Tabel 4.3 untuk contoh soal 4.1 dan Tabel 4.4, Tabel 4.5 dan Tabel 4.6 untuk contoh soal 4.2.

5.2 Saran

Tugas Akhir ini membahas tentang penyelesaian persamaan differensial aljabar nonlinier dan linear $f(x, y, y') = 0$, berdasarkan masalah nilai awal nonliniernya $y_1(0) = c_1$ $y_2(0) = c_2$ dan $y_n(0) = c_n$. Metode pertubasi homotopi selain digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinear, metode ini juga dapat digunakan untuk menyelsaikan persamaan diferensial linear. Bagi pembaca yang berminat melanjutkan Tugas Akhir ini, penulis sarankan untuk membahas tentang persamaan diferensial aljabar nonlinier dengan metode lain.

DAFTAR PUSTAKA

Chiang, C. Mei. "*Mathematical Analysis in Engineering*". Cambridge University Press, Australia. 1995.

Celik, E. dan M. Bayram, T. Yeloglu. "Solution of differential algebraic equations (DAEs) by Adomian Decomposition Method". *International Journal Pure dan Applied Mathematical Sciences*. 3: 93 – 100, 2006.

Ganzi, D.D. H. Mirgolbabaei et al. "Applicatio of homotopy perturbation method to solve linear and nonlinear systems of ordinary differential equations and differential equation of Order Three". *Journal of Applied Sciences*. 8: 1256-1261, 2008.

Guzel, N. dan M. Bayram. "Power series solution of nonlinear first order differential equation systems". *Trakya Univ J Sci*. 6: 107 – 111, 2005.

He, Ji-Huan. "Homotopy perturbation method: a new nonlinier analitical technique". *Applied Mathematics and Computation*. 135: 73 – 79, 2003.

Sieradsk, J. Allan. "*An Introduction to Topologi and Homotopy*". PWS Kent Pusblising Company. Boston. 1992.

Sazzad, MD. Hossien Chowdhury. "*Solving and Nonlinier Differential Equations by Homotopy Perturbation Method*". Faculty Of Sciene And Technology University Kebangsaan Malaysia Bangi. 2007.

Stephen, L. Campbell et al. "Differential algebraic equation". *Scholarpedia*. 3: 2849, 2008.